b) stabilność

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\beta_H}{N}(N-C-H)H - (\delta_H + d_H)H$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta_C}{N}(N-C-H)C - (\delta_C + d_C)C$$

Korzystamy z linearyzacji z „The Phase Plane" Z. S. Tseng

$$dH = F(C,H) \approx F(C_0, H_0) + F_C(C_0,H_0)(C-C_0) + F_H(C_0,H_0)(H-H_0) =$$
$$= F_C(C_0,H_0)C + F_H(C_0,H_0)H$$

$$dC = G(C,H) \approx G(C_0,H_0) + G_C(C_0,H_0)(C-C_0) + G_H(C_0,H_0)(H-H_0) =$$
$$= G_C(C_0,H_0)C + G_H(C_0,H_0)H$$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$F_C(C_0,H_0) = \frac{-\beta_H}{N}H_0$$

$$F_H(C_0,H_0) = \frac{\beta_H}{N}(N-C_0-2H_0) - (\delta_H + d_H)$$

$$G_C(C_0,H_0) = \frac{\beta_C}{N}(N-2C_0-H_0) - (\delta_C + d_C)$$

$$G_H(C_0,H_0) = -\frac{\beta_C}{N}C_0$$

Po linearyzacji równania wyglądają następująco:

$$dH = \left[\left(-\frac{\beta_H}{N}\right)H_0\right]C_0 + \left[\frac{\beta_H}{N}(N-C_0-2H_0) - (\delta_H + d_H)\right]H_0$$

$$dC = \left[\frac{\beta_C}{N}(N-2C_0-H_0) - (\delta_C + d_C)\right]C_0 + \left[\left(-\frac{\beta_C}{N}\right)C_0\right]H_0$$

Konstruujemy macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\beta_H}{N}(N-C_0-2H_0) - (\delta_H + d_H) & \left(-\frac{\beta_H}{N}\right)H_0 \\ \left(-\frac{\beta_C}{N}\right)C_0 & \frac{\beta_C}{N}(N-2C_0-H_0) - (\delta_C + d_C) \end{bmatrix}$$

Dla punktu $(0,0)$ macierz wygląda następująco:

$$J = \begin{bmatrix} \beta_H - (\sigma_H + \delta_H) & 0 \\ 0 & \beta_C - (\sigma_C + \delta_C) \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \beta_H - (\sigma_H + \delta_H) - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_C - (\sigma_C + \delta_C) \end{bmatrix}$$

Otrzymane wartości własne

$$\lambda_1 = (\beta_C - (\sigma_C + \delta_C))$$

$$\lambda_2 = (\beta_H - (\sigma_H + \delta_H))$$

Aby p. był stabilny $\lambda_1 \wedge \lambda_2 < 0$

$$\beta_C - (\sigma_C + \delta_C) < 0 \quad \wedge \quad \beta_H - (\sigma_H + \delta_H) < 0$$

$$-(\sigma_C + \delta_C) < -\beta_C \quad \wedge \quad -(\sigma_H + \delta_H) < -\beta_H$$

$$(\sigma_C + \delta_C) > \beta_C \quad \wedge \quad (\sigma_H + \delta_H) > \beta_H$$

$$\frac{(\sigma_C + \delta_C)}{\beta_C} > 1 \quad \wedge \quad \frac{(\sigma_H + \delta_H)}{\beta_H} > 1$$

$$(\delta_C + \sigma_C) > \beta_C \qquad\qquad (\sigma_H + \delta_H) > \beta_H$$

$$1 > \frac{\beta_C}{(\delta_C + \sigma_C)} \qquad\qquad 1 > \frac{\beta_H}{(\sigma_H + \delta_H)}$$

$$R_C = \frac{\Lambda \beta_C}{\sigma_S N(\sigma_C + \delta_C)} < \frac{\Lambda}{\sigma_S N} \qquad\qquad R_H = \frac{\Lambda \beta_H}{\sigma_S N(\delta_H + \sigma_H)} < \frac{\Lambda}{\sigma_S N}$$

$$R_C < \frac{1}{\sigma_S N} \qquad\qquad R_H < \frac{1}{\sigma_S N}$$

Dla punktu $\left(0, N - \frac{N(\sigma_H + \alpha_H)}{\beta_H}\right)$ macierz wygląda następująco:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\beta_H}{N}\left(N - 2\left(N - \frac{N(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H}\right)\right) - (\sigma_H + \alpha_H) & -\frac{\beta_H}{N}\left(N - \frac{N(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H}\right) \\ 0 & \frac{\beta_C}{N}\left(N - \left(N - \frac{N(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H}\right)\right) - (\sigma_C + \alpha_C) \end{bmatrix}$$

$$J : \begin{bmatrix} (\sigma_H+\alpha_H) - \beta_H & (\sigma_H+\alpha_H) - \beta_H \\ 0 & \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H} - (\sigma_C+\alpha_C) \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} (\sigma_H+\alpha_H) - \beta_H - \lambda & (\sigma_H+\alpha_H) - \beta_H \\ 0 & \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H} - (\sigma_C+\alpha_C) - \lambda \end{bmatrix}$$

Otrzymane wartości własne

$$\lambda_1 = (\sigma_H + \alpha_H) - \beta_H$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H} - (\sigma_C + \alpha_C)$$

Aby p. był stabilny $\lambda_1 \wedge \lambda_2 < 0$

$$(\sigma_H + \alpha_H) - \beta_H < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H} - (\sigma_C+\alpha_C) < 0$$

$$(\sigma_H + \alpha_H) < \beta_H \qquad \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H} < (\sigma_C+\alpha_C)$$

$$\frac{\sigma_H + \alpha_H}{\beta_H} < 1 \qquad \frac{\beta_C(\sigma_H+\alpha_H)}{\beta_H(\sigma_C+\alpha_C)} < 1$$

<1

$$\frac{\beta_H}{\alpha_H + \sigma_H} > 1 \qquad \frac{\beta_C}{\sigma_C + \alpha_C} < 1$$

$$R_H > \frac{\Lambda}{\delta_S N} \qquad R_C < \frac{\Lambda}{\delta_S N}$$

$\Downarrow$ $\Rightarrow$

$$R_C < \frac{\Lambda}{\delta_S N} < R_H$$

Dla punktu $\left(N - \frac{N(\delta_C+\alpha_C)}{\beta_C}, 0\right)$ macierz wygląda następująco:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\beta_H}{N}\left[N - \left(N - \frac{N(\delta_C+\alpha_C)}{\beta_C}\right)\right] - (\delta_H+\alpha_H) & 0 \\ -\frac{\beta_C}{N}\left(N - \frac{N(\delta_C+\alpha_C)}{\beta_C}\right) & \frac{\beta_C}{N}\left(N - 2\left[N - \frac{N(\delta_C+\alpha_C)}{\beta_C}\right]\right) - (\delta_C+\alpha_C) \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C} - (\delta_H+\alpha_H) & 0 \\ (\delta_C+\alpha_C) - \beta_C & (\delta_C+\alpha_C) - \beta_C \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \det\begin{vmatrix} \frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C} - (\delta_H+\alpha_H) - \lambda & 0 \\ (\delta_C+\alpha_C) - \beta_C & (\delta_C+\alpha_C) - \beta_C - \lambda \end{vmatrix}$$

Otrzymane wartości własne

$$\lambda_1 = (\delta_C+\alpha_C) - \beta_C$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C} - (\delta_H+\alpha_H)$$

Aby p. był stabilny $\lambda_1 \wedge \lambda_2 < 0$

$$(\delta_C+\alpha_C) - \beta_C < 0$$

$$(\delta_C+\alpha_C) < \beta_C$$

$$\frac{\delta_C+\alpha_C}{\beta_C} < 1$$

$$\frac{\beta_C}{\delta_C+\alpha_C} > 1$$

$$R_C > \frac{1}{\delta_S N}$$

$$\frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C} - (\delta_H+\alpha_H) < 0$$

$$\frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C} < (\delta_H+\alpha_H)$$

$$\frac{\beta_H(\alpha_C+\delta_C)}{\beta_C(\delta_H+\alpha_H)} < 1 \qquad <1$$

$$\frac{\beta_H}{\delta_H+\alpha_H} < 1$$

$$R_H < \frac{1}{\delta_S N}$$

$$\Rightarrow \quad R_H < \frac{1}{\delta_S N} < R_C$$